ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1985

*****

TA

MATHEMATIQUES II
(4 pages dactylographiées)

Dans tout le problème, on se place dans un espace E affine euclidien orienté de dimension 3 ; le temps t décrit un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On donne un point fixe O et un vecteur unitaire fixe $\vec{k}$ qui définissent une droite matérielle D ; on donne d'autre part un point mobile G et un vecteur unitaire mobile $\vec{u}$ qui définissent une droite matérielle mobile Δ.

Les positions à l'instant t de G, $\vec{u}$ et Δ sont respectivement notées G(t), $\vec{u}(t)$, Δ_t ; on supposera que les fonctions $t \mapsto G(t)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ admettent pout tout t une dérivée continue.

Chaque fois que, dans la suite de cet énoncé, on parlera d'un point matériel de D (respectivement de Δ) il s'agira d'un point matériel situé sur D (respectivement sur Δ), et invariablement lié à elle, c'est-à-dire d'un point P tel que $\overrightarrow{OP} = \mu \vec{k}$ (respectivement d'un point M tel que $\overrightarrow{GM} = \lambda\vec{u}$) où μ (respectivement λ) est indépendant du temps.

La deuxième partie du problème étudie un cas particulier de la situation considérée dans la première partie, mais est très largement indépendante de celle-ci.

PREMIERE PARTIE

I.1. Question préliminaire :

Soit A, B, C trois applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $t \in I$,

$$H_\lambda(t) = \lambda^2 A(t) + \lambda B(t) + C(t).$$

On définit ainsi, pour tout λ réel, une application H_λ de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe trois valeurs réelles distinctes λ_0 , λ_1 , λ_2 telles que les trois fonctions H_{λ_0} , H_{λ_1} , H_{λ_2} soient constantes. Etablir qu'alors les trois fonctions A, B, C sont constantes.

I.2. Soit c une constante non nulle. A tout réel λ on associe le point matériel M_λ de Δ et le point matériel P_λ de D tels qu'à chaque instant :

$$\overrightarrow{GM}_\lambda = \lambda\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP}_\lambda = c\lambda\vec{k}$$

a) Calculer $\overrightarrow{P_\lambda M_\lambda}^2$

b) Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :

i. Pour tout réel λ , la distance $P_\lambda M_\lambda$ des points P_λ et M_λ est indépendante de t.

ii . Pour trois valeurs distinctes de λ , la distance $P_\lambda M_\lambda$ est indépendante de t.

iii . les trois quantités

$$\vec{u}.\vec{k} \quad , \quad (\vec{u} - c\vec{k}).\overrightarrow{OG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG}^2$$

sont indépendantes de t.

I.3. Soit c une constante non nulle. A tout λ réel non nul on associe cette fois le point matériel M_λ de Δ et le point matériel Q_λ de D vérifiant à chaque instant

$$\overrightarrow{GM_\lambda} = \lambda \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OQ_\lambda} = \frac{c}{\lambda} \vec{k}$$

a) Calculer $\overrightarrow{Q_\lambda M_\lambda}^2$

b) Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :

i . Pour tout $\lambda \neq 0$, la distance $Q_\lambda M_\lambda$ est indépendante de t.

ii . Pour trois valeurs distinctes et non nulles de λ , la distance $Q_\lambda M_\lambda$ est indépendante de t.

iii . Les trois quantités

$$\vec{u}.\overrightarrow{OG} \quad , \quad \vec{k}.\overrightarrow{OG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG}^2 - 2c\,\vec{u}.\vec{k}$$

sont indépendantes de t.

On aura intérêt à raisonner de façon analogue à ce qui a été fait dans les questions I.1. et I.2.

I.4. On considère trois points matériels distincts A_0 , A_1 , A_2 de Δ et trois points matériels distincts B_0 , B_1 , B_2 de D. On recherche un couple de points matériels Φ de Δ , F de D tels que :

$$\overline{\Phi A_0}\,.\,\overline{FB_0} = \overline{\Phi A_1}\,.\,\overline{FB_1} = \overline{\Phi A_2}\,.\,\overline{FB_2}$$

Etablir qu'il y a existence et unicité d'un tel couple si et seulement si

$$\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_0A_1}} \neq \frac{\overline{B_0B_2}}{\overline{B_0B_1}}$$

(Il pourra être utile dans cette étude de prendre comme origines sur Δ et D respectivement les points A_0 et B_0).

I.5. Δ est supposée mobile de telle sorte qu'il existe trois points matériels distincts A_0 , A_1 , A_2 de Δ et trois points matériels distincts B_0 , B_1 , B_2 de D tels que les trois distances A_0B_0 , A_1B_1 et A_2B_2 soient constantes.

Déduire des questions précédentes que, pour tout point matériel M de Δ , à l'exception peut-être d'un seul, la trajectoire de M est tracée sur une sphère dont le centre est sur D ; que dire, s'il existe, de la trajectoire du point exceptionnel ?

On distinguera deux cas selon que $\dfrac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_0A_1}}$ et $\dfrac{\overline{B_0B_2}}{\overline{B_0B_1}}$ sont ou non égaux.

DEUXIEME PARTIE

On introduit ici deux vecteurs fixes $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que le repère $\mathcal{F} = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormé direct. Le temps t, sauf dans la dernière question, décrit $\mathbb{R}$ tout entier.

On pose

$$\vec{I} = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j}$$
$$\vec{J} = -\sin t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j}$$
$$\vec{u} = \sin 2t\, \vec{J} + \cos 2t\, \vec{k} = -\sin t \sin 2t\, \vec{i} + \cos t \sin 2t\, \vec{j} + \cos 2t\, \vec{k}$$

et on définit un point mobile G par

$$\overrightarrow{OG} = 2\cos t\, \vec{I}$$

Conformément au préambule, Δ désigne la droite matérielle mobile définie par G et $\vec{u}$.

II.1. Préciser la courbe Γ décrite par G ; on appellera A le point dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{F}$ sont (2, 0, 0).

II.2. Pour tout réel λ, on désigne par M_λ le point matériel de Δ défini par $\overrightarrow{GM_\lambda} = \lambda\vec{u}$, et par C_λ la courbe trajectoire de M_λ.

a) Donner les coordonnées cartésiennes x, y, z dans le repère $\mathcal{F}$ du point $M_\lambda(t)$, position de M_λ à l'instant t.

b) Calculer en fonction de λ et de t le carré de la distance $OM_\lambda(t)$.

c) Etablir que C_λ est, pour $\lambda \neq 0$, tracée sur une sphère dont le centre est situé sur D ; on en précisera le centre et le rayon.

d) Comparer C_λ et $C_{-\lambda}$.

e) Par quelle transformation simple, indépendante du temps, peut-on déduire :

$$\Delta_{t+\pi} \text{ de } \Delta_t \ ?$$

II.3. Donner une équation cartésienne de la projection orthogonale de Δ_t sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Etablir que, sauf cas particuliers à préciser, Δ_t rencontre une droite fixe parallèle à D.

II.4. Dans cette question et les deux suivantes, on étudie la courbe C_1 décrite par $M_1(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$; pour plus de simplicité C_1 et $M_1(t)$ seront notés C et M(t).

a) Etablir que les coordonnées cartésiennes de M(t) dans $\mathcal{F}$ sont

$$x(t) = 2 - 2(1+\cos t)\sin^2 t$$
$$y(t) = 2(1+\cos t)\sin t \cos t$$
$$z(t) = \cos 2t$$

b) Soit L(t) le milieu du segment d'extrémités M(t) et $M(t+\pi)$. Déterminer la courbe décrite par L lorsque t décrit R ; on indiquera sa nature et ses projections sur les 3 plans des coordonnées du repère $\mathcal{F}$.

II.5. Soit W la courbe projection orthogonale de C sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. en prenant A comme origine et $(A;\vec{j})$ comme axe polaire, établir qu'une équation polaire de W est

$$r = 2\sin\theta + \sin 2\theta .$$

Construire W.

N.B. : On ne cherchera pas à déterminer le sens de concavité de W, pas plus que celui des courbes V et U définies dans la question suivante.

II.6. Etudier et tracer les courbes V et U, projections orthogonales respectives de C sur les plans $(O ; \vec{i}, \vec{k})$ et $(O ; \vec{j}, \vec{k})$. Quelle propriété résulte pour V (respectivement pour U) de l'étude faite en II.4.b ?

II.7. Dans cette question t décrit l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}[$. Un solide mobile Σ est lié à la droite matérielle Δ c'est-à-dire que G et $\vec{u}$ sont fixes par rapport à Σ.

Soit $\vec{\ell}$ le vecteur lié à Σ qui à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$ coïncide avec $\vec{I}$. On pose à chaque instant

$$\vec{\ell} = \cos\phi\, \vec{I} + \sin\phi\, \vec{u} \wedge \vec{I} .$$

(On légitimera cette écriture, et l'on suppose que ϕ est une fonction de t admettant une dérivée continue).

Trouver l'expression de ϕ en fonction de t pour que le mouvement de Σ soit constamment tangent à un mouvement de rotation, c'est-à-dire pour que, pour tout t, il existe un mouvement de rotation ayant, à cet instant, même torseur de vitesses que le mouvement de Σ.